

# BM202 AYRIK İŞLEMSEL YAPILAR

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞİMŞEK

# Derse Genel Bakış

- Dersin Web Sayfası
  - <http://www.mehmetsimsek.net/bm202.htm>
    - Ders kaynakları
    - Ödevler, duyurular, notlandırma...
    - İletişim bilgileri

# Matematik Aslında Nedir?

- Yalnızca sayılarla ilgili değil
- Matematik daha fazlasıdır:
  - İyi tanımlanmış kavramlar hakkındaki mutlak doğruları inceleyen bilim dalı
  - Bu kavramlar sadece sayılar değildir. Nesnelere, seslere, görüntülere, herhangi bir şeye...

# Bu Ders Ne İle İlgili?

- Ayrık: Süreklinin karşıtı
  - Ayrık: Dijital, Sürekli: Analog
- Yapı: Belirli bir desene göre küçük nesnelere oluşturulmuş nesnelere
- Ayrık Matematik: Ayrık matematiksel nesne ve yapılarla çalışmak

# Bilgisayar Bilimdeki Yeri

- Algoritmalar, veri yapıları
- Programlama dilleri derleyicileri ve yorumlayıcıları
- Bilgisayar ağları
- İşletim sistemleri
- Bilgisayar mimarisi
- Veritabanı sistemleri
- Kriptografi
- Grafik&Animasyon
- HERŞEY

# Dersin Hedefleri

- Basit mantıksal iddiaların ispatı
- Basit algoritmaların doğruluğunun gösterilmesi
- Doğru mantıksal iddialar ve algoritmalar oluşturma
- ...

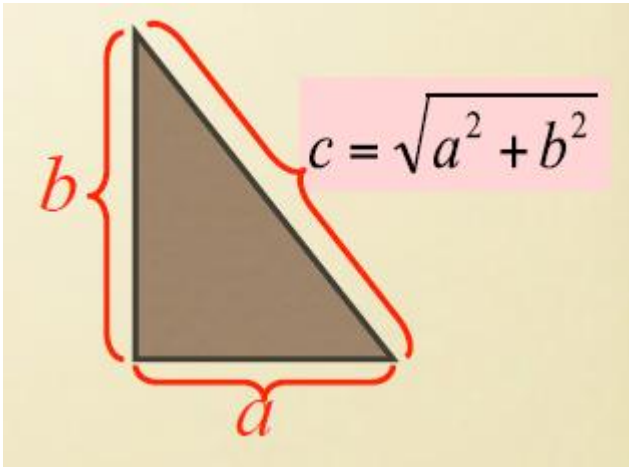
# Konular

- Mantık ve İspatlar
- Kümeler, fonksiyonlar, matrisler...
- Tümevarım
- İlişkiler
- Algoritmalar
- Graf teorisine giriş
- Graf algoritmaları
- Multi graflar ve uygulamaları
- Graf uygulamaları
- Yönlü graflar
- Ağaçlar
- Minimum yayılım ağaçları
- İkili ağaçlar

# Bir İspat Örneği

- **Theorem:** (*Pisagor Teoremi*)

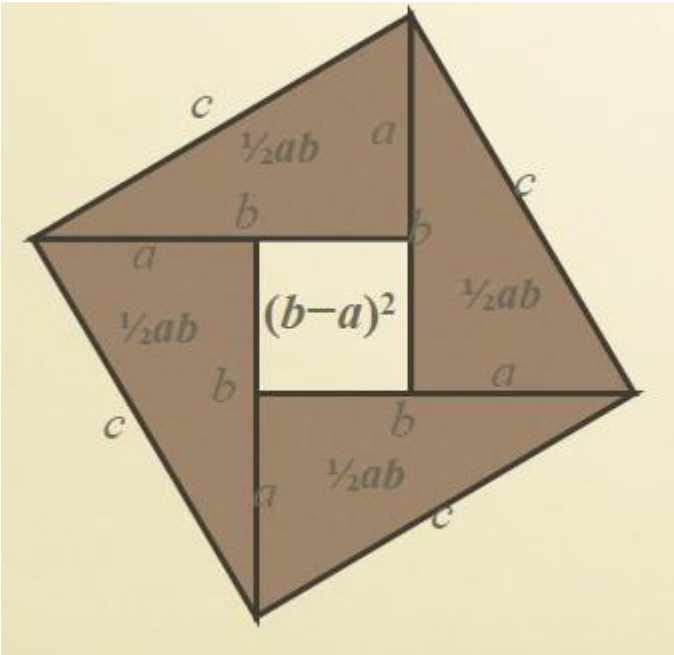
Gerçek sayılar  $a$ ,  $b$ , ve  $c$ , için eğer  $a$  ve  $b$  bir dik üçgenin birbirine dik olan kenarları ise ve  $c$  hipotenüs ise  $a^2 + b^2 = c^2$ .





# Bir İspat Örneği

- **İspat.** Aşağıdaki şekli göz önüne alalım:
- dış karenin alanı=  $c^2$ ,
- Aşağıdaki alanların toplamı:
- 4 adet üçgenin alanı=  $4(\frac{1}{2}ab) = 2ab$
- İçerdeki küçük karenin alanı =  $(b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$ .
- Böylece,  $c^2 = 2ab + (b^2 - 2ab + a^2) = a^2 + b^2$ . ■



# Mantığın Temelleri

- *Matematiksel Mantık*, bileşik ifadeler ile çalışmak için bir araçtır. Şunları içerir:
  - Bileşik ifadeleri anlatmak için biçimsel bir dil
  - Bileşik ifadeler yazmak için kısa bir notasyon
  - Bir ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek için bir yöntem
  - Matematiğin bütün alanları için uygun ispat yöntemlerinin temeli

# Önermeler Mantığı

- **Önermeler Mantığı**, basit ifadelerden mantıksal bağlaçları kullanarak yeni ifadeler türetmektir.
- Bazı Uygulamaları
  - Sayısal elektronik devreler oluşturma
  - Programlardaki koşulları ifade etme
  - Veritabanı sorguları oluşturma

# Önermeler Mantığı

- Bir Öneme: basit olarak bir bildirim ifadesidir.
  - Kesinlik vardır
- Bir önermenin 1 doğruluk değeri vardır. T true, F, false
  - Bir anda yalnızca biri olabilir

# Önermeler Mantığı

- Örnekler:
  - Hava yağmurlu
  - Ankara Türkiye'nin başkentidir
  - $1+2=3$
- Aşağıdakiler Önerme **DEĞİL**
  - Kim O?
  - Sadece yap!
  - Evet, ama bu şekilde...
  - $1+2$

# Önermeler Mantığı

- Operatörler
  - Mantıksak operatörler de bir veya daha fazla operand alabilir
  - Aritmetik operatörlerden farklı olarak sayılarla değil, ifadelerin doğruluklarıyla ilgilenirler

# Önermeler Mantığı

- **Bazı Popüler Mantıksal Operatörler**
- Değil operator **NOT** Unary  $\neg$
- Kesişim operator **AND** Binary  $\wedge$
- Ayrışım operator **OR** Binary  $\vee$
- Özel-Ayrışım operator **XOR** Binary  $\oplus$
- Gerektirme operator **IMPLIES** Binary  $\rightarrow$
- İkikoşullu operator **IFF** Binary  $\leftrightarrow$

# Önermeler Mantığı

- Değil operator **NOT** Unary  $\neg$ 
  - $p$  = «saçım kahverengi»
  - $\neg p$  = «saçım kahverengi değil»

– Doğruluk Tablosu

$p$	$\neg p$
T	F
F	T



# Önermeler Mantığı

- Kesişim operator **AND** Binary  $\wedge$ 
  - $p$  = «öğlen salata yiyeceğim»
  - $q$  = «akşam et yiyeceğim»
  - $p \wedge q$  = «öğlen salata yiyeceğim ve akşam et yiyeceğim»

$p$	$q$	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

# Önermeler Mantığı

- Ayrışım operator **OR** Binary  $\vee$ 
  - $p$  = «arabamın kötü bir motoru var»
  - $q$  = «arabamın kötü bir karbüratörü var»
  - $p \vee q$  = «arabamın kötü bir motoru var veya arabamın kötü bir karbüratörü var»

$p$	$q$	$p \vee q$
F	F	F
F	T	<b>T</b>
T	F	<b>T</b>
T	T	T

# Önermeler Mantığı

- İç İçe Operatörler
  - Gruplama için operatör kullanın
  - «Eski bir arkadaşımı gördüm, büyümüş veya çökmüştü» =  $f \wedge (g \vee s)$
  - $\neg$  operatörü yukarıdakilere göre önceliklidir
  - $\neg s \wedge f = (\neg s) \wedge f$  .  $\neg (s \wedge f)$  **değil**

# Önermeler Mantığı

- Basit bir çalışma
  - $p$  = “dün gece yağmur yağdı”
  - $q$  = “dün gece fıskiyeler çalıştı”
  - $r$  = “bu sabah çimenler ıslaktı”
- **Aşağıdaki ifadeleri Türkçe olarak söyleyin**
  - $\neg p$  =

# Önermeler Mantığı

- Basit bir çalışma
  - $p$  = “dün gece yağmur yağdı”
  - $q$  = “dün gece fıskiyeler çalıştı”
  - $r$  = “bu sabah çimenler ıslaktı”
- **Aşağıdaki ifadeleri Türkçe olarak söyleyin**
  - $\neg p$  = «dün gece yağmur yağmadı»

# Önermeler Mantığı

- Basit bir çalışma
  - $p$  = “dün gece yağmur yağdı”
  - $q$  = “dün gece fıskiyeler çalıştı”
  - $r$  = “bu sabah çimenler ıslaktı”
- **Aşağıdaki ifadeleri Türkçe olarak söyleyin**
  - $\neg p$  = «dün gece yağmur yağmadı»
  - $r \wedge \neg p$  =

# Önermeler Mantığı

- Basit bir çalışma
  - $p$  = “dün gece yağmur yağdı”
  - $q$  = “dün gece fıskiyeler çalıştı”
  - $r$  = “bu sabah çimenler ıslaktı”
- **Aşağıdaki ifadeleri Türkçe olarak söyleyin**
  - $\neg p$  = «dün gece yağmur yağmadı»
  - $r \wedge \neg p$  = «bu sabah çimenler ıslaktı ve dün gece yağmur yağmadı»

# Önermeler Mantığı

- Basit bir çalışma
  - $p$  = “dün gece yağmur yağdı”
  - $q$  = “dün gece fıskiyeler çalıştı”
  - $r$  = “bu sabah çimenler ıslaktı”
- **Aşağıdaki ifadeleri Türkçe olarak söyleyin**
  - $\neg p$  = «dün gece yağmur yağmadı»
  - $r \wedge \neg p$  = «bu sabah çimenler ıslaktı ve dün gece yağmur yağmadı»
  - $\neg r \vee p \vee q$  =



# Önermeler Mantığı

- Basit bir çalışma
  - $p$  = “dün gece yağmur yağdı”
  - $q$  = “dün gece fıskiyeler çalıştı”
  - $r$  = “bu sabah çimenler ıslaktı”
- **Aşağıdaki ifadeleri Türkçe olarak söyleyin**
  - $\neg p$  = «dün gece yağmur yağmadı»
  - $r \wedge \neg p$  = «bu sabah çimenler ıslaktı ve dün gece yağmur yağmadı»
  - $\neg r \vee p \vee q$  = «*bu sabah çimenler ıslak değildi veya dün gece yağmur yağdı veya dün gece fıskiyeler çalıştı*»

# Önermeler Mantığı

- Özel-Ayrışım operator **XOR** Binary  $\oplus$ 
  - $p$  = «bu dersten A alacağım»
  - $q$  = «bu dersi bırakacağım»
  - $p \oplus q$  = «ya bu dersten A alacağım ya da bu dersi bırakacağım» (İKİSİ BİRDEN DEĞİL)

$p$	$q$	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	<b>F</b>

# Önermeler Mantığı

- Türkçe kafanızı karıştırmayın
  - Türkçedeki «veya» kafanızı karıştırabilir
  - Bu dersteki «veya» kapsamak anlamına gelir
- Ali yazardır veya şarkıcıdır -  $\vee$
- Ali erkektir veya bayandır -  $\oplus$

# Önermeler Mantığı

- Gerektirme operator **IMPLIES** Binary  $\rightarrow$
- Gerektirme  $p \rightarrow q$  ifadesi:  $p$  gerektirir  $q$ .
- ***Yani:  $p$  doğru ise  $q$  doğrudur.  $P$  doğru değilse  $q$  doğru da olabilir yanlış da olabilir***

# Önermeler Mantığı

- Gerektirme operator **IMPLIES** Binary  $\rightarrow$
- $p \rightarrow q$  yalnızca  $p$  **True** fakat  $q$  **False** ise **False** olur.
- Ör:  $(1=0) \rightarrow$  «domuzlar uçabilir»

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	<b>F</b>
T	T	T

# Önermeler Mantığı

- **Gerektirme Örnekleri**

- “Eğer bu ders biterse, yarın güneş doğacak.”

- *True or False?*

- • “Salı haftanın bir günü ise, ben bir penguenim”

- *True or False?*

- “ $1+1=6$  ise, Bush halen başkandır”

- *True or False?*

- “Eğer ay peynirden yapılmışsa, Ben Bill Gates’ten daha zenginim.”

- *True or False?*

# Önermeler Mantığı

- **Gerektirme Örnekleri**

- “Eğer bu ders biterse, yarın güneş doğacak.”

- *True or False?*

- • “Salı haftanın bir günü ise, ben bir penguenim”

- True or False?*

- “ $1+1=6$  ise, Bush halen başkandır”

- True or False?*

- “Eğer ay peynirden yapılmışsa, Ben Bill Gates’ten daha zenginim.”

- *True or False?*

# Önermeler Mantığı

- **Gerektirme Örnekleri**

- “Eğer bu ders biterse, yarın güneş doğacak.”

- *True or False?*

- • “Salı haftanın bir günü ise, ben bir penguenim”  
*True or False?*

- “ $1+1=6$  ise, Bush halen başkandır”

- *True or False?*

- “Eğer ay peynirden yapılmışsa, Ben Bill Gates’ten daha zenginim.”

- *True or False?*



# Önermeler Mantığı

- **Gerektirme Örnekleri**

- “Eğer bu ders biterse, yarın güneş doğacak.”

- *True* or *False*?

- • “Salı haftanın bir günü ise, ben bir penguenim”  
*True* or *False*?

- “ $1+1=6$  ise, Bush halen başkandır”

- *True* or *False*?

- “Eğer ay peynirden yapılmışsa, Ben Bill Gates’ten daha zenginim.”

- *True* or *False*?

# Önermeler Mantığı

- **Gerektirme Örnekleri**

- “Eğer bu ders biterse, yarın güneş doğacak.”

- *True* or *False*?

- • “Salı haftanın bir günü ise, ben bir penguenim”  
*True* or *False*?

- “ $1+1=6$  ise, Bush halen başkandır”

- *True* or *False*?

- “Eğer ay peynirden yapılmışsa, Ben Bill Gates’ten daha zenginim.”

- *True* or *False*?

# Önermeler Mantığı

- **Karşıt, Ters, Zıt Pozitif**
- $p \rightarrow q$  üzerine bazı kavramlar:
  - **Karşıt** :  $q \rightarrow p$ .
  - **Ters** :  $\neg p \rightarrow \neg q$ .
  - **Zıt Pozitif**:  $\neg q \rightarrow \neg p$ .
- Bunlardan bir tanesi  $p \rightarrow q$  ile aynı doğruluk tablosuna sahip. Hangisi?

# Önermeler Mantığı

- **Karşıt, Ters, Zıt Pozitif**
- $p \rightarrow q$  üzerine bazı kavramlar:
  - **Karşıt** :  $q \rightarrow p$ .
  - **Ters** :  $\neg p \rightarrow \neg q$ .
  - **Zıt Pozitif**:  $\neg q \rightarrow \neg p$ .
- Bunlardan bir tanesi  $p \rightarrow q$  ile aynı doğruluk tablosuna sahip. Hangisi? **Zıt Pozitif**

# Önermeler Mantığı

- Nasıl emin olabiliriz?

$p$	$q$	$\neg q$	$\neg p$	$p^{\textcircled{R}}$	$q$	$\neg q^{\textcircled{R}}$	$\neg p$
F	F	T	T	T		T	
F	T	F	T	T		T	
T	F	T	F	F		F	
T	T	F	F	T		T	

# Önermeler Mantığı

- İkikoşullu operator **IFF** Binary  $\leftrightarrow$ 
  - **Ancak ve ancak**
  - **Gerek ve yeter şart**
- $p$  = “bütün sınavlardan tam puan alırsan ve bütün ödevleri yaparsan”
- $q$  = “bu dersten A+ alabilirsin”
- $p \leftrightarrow q$  = “**Ancak ve ancak** bütün sınavlardan tam puan alırsan ve bütün ödevleri yaparsan bu dersten A+ alabilirsin ”

# Önermeler Mantığı

- İkikoşullu operator **IFF** Binary  $\leftrightarrow$
- $p \leftrightarrow q$  doğruluk tablosunda  $p$  ve  $q$  aynı değerlere sahiptir.
- Doğruluk tablosu Xor'un tersidir.
- Yani,  $p \leftrightarrow q$  ile  $\neg(p \oplus q)$  aynı şey.

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

# Önermeler Mantığı

- ÖZET

$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \textcircled{R} q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T